**第4讲 不等式及不等式组**

**课前检测**

1.不等式组有解，*m*的取值范围是( ).

A.*m*>8 B.*m*≥8 C.*m*<8 D.*m*≤8

答案：C

2.下列语句正确的是( ).

A.因为所以 B.因为所以

C.因为*ax*>*ay*，所以*x*>*y* D.因为所以

答案：D

3.*a*为任意有理数，则不等式恒成立的是( ).

A.1-*a*<1 C. D.2*a*>*a*

答案：C

4.若不等式2*x*-1<10和*x*+3>6都成立，那么*x*满足( ).

A.*x*>3 B. C.3<*x*< D.*x*<3或*x*>

答案：C

5.不等式15-2*x*>7的正整数解的个数为( ).

A.3个 B.4个 C.5个 D.6个

答案：A

6.*a*取什么值时，式子3*a*+2的值分别满足：

(1)是正数？(2)是负数？(3)是0?

答案：

**知识梳理**

**1．不等式的概念**

**不等式：**用不等号“>”、“<”、“≤”或“≥”表示的关系式，叫做不等式.

**2．不等式的性质：**

**性质1：**不等式的两边同时加上(或减去)同一个数或同一个含有字母的式子，不等号的方向不变.即：如果*a*>*b*，那么*a*+*m*>*b*+*m*；如果*a*<*b*，那么*a*+*m*<*b*+*m*.

**性质2：**不等式的两边同时乘以(或除以)同一个正数，不等号的方向不变.即：

如果*a*>*b*，且*m*>0，那么*am*>*bm*(或

如果*a*<*b*，且*m*>0，那么*am*<*bm*(或

**性质3：**不等式的两边同时乘以(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.即：

如果*a*>*b*，且*m*<0，那么*am*<*bm*(或)；

如果*a*<*b*，且*m*<0，那么*am*>*bm*(或).

**3．不等式的解集：**

(1)不等式的解：在含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解.

(2)不等式的解集：不等式的解的全体叫做不等式的解集.

(3)解不等式：求不等式的解集的过程叫做解不等式.

(4)在数轴上表示不等式的解集：先画数轴，再定界点，后定方向，大于向右，小于向左，含等号画实心圆，没等号画空心圆.

**4．一元一次不等式**

(1)定义：只含有一个未知数且未知数的次数是一次的不等式叫做一元一次不等式.

(2)解法：求解方法与解一元一次方程类似，根据不等式性质将不等式变形，从而得到解集.

可概括为：①去分母；②去括号；③移项；④化成*ax*>*b*(或*ax*<*b*等)的形式(其中*a*≠0)；⑤两边同除以未知数的系数，得到不等式的解集.

**5．一元一次不等式组及其解集**

(1)一元一次不等式组：由几个含有同一个未知数的一次不等式组成的不等式组，叫做一元一次不等式组.

(2)不等式组的解集：不等式组中所有不等式的解集的公共部分叫做这个不等式组的解集.

(3)解不等式组：求不等式组的解集的过程叫做解不等式组.

**6．不等式组的解法：**

(1)求出不等式组中各个不等式的解集；

(2)在数轴上表示各个不等式的解集；

(3)确定各个不等式解集的公共部分，就得到这个不等式组的解集.

**7．不等式及不等式组的应用**

(1)与方程的综合应用；(2)实际应用——一般步骤：审、设、列、解、答.

**专题讲解**

**专题1：不等式的性质**

不等式的性质是解不等式的依据，可以利用其对一些不等式进行变形，要注意变形时不等号是否发生变化.

**例1：**下列不等式变形中，一定正确的是( ).

A.若*ac*>*bc*，则*a*>*b* B.若*a*>*b*，则*am*2>*bm*2

C.若*ac*2>*bc*2，则*a*>*b* D.若*a*>0，*b*>0，且则*a*>*b*

[解析]A中，若*c*<0，则两边除以*c*，得*a*<*b*；B中，若*m*=0，则两边乘*m*2，得*am*2=*bm*2=0；C中，由*ac*2>*bc*2知*c*≠0，两边同时除以*c*2(*c*2>0)，有*a*>*b*；D可用特殊值法，设*a*=1，*b*=2代入检验即可.

[答案]C

[点评]要注意不等式中的隐含条件，如：若*ac*2>*bc*2，则*a*>*b*中，隐含着“*c*≠0”这一条件.

**例2：**已知*x*=3是关于*x*的不等式的解，求*a*的取值范围.

[解析]先根据不等式的解的定义，将*x*=3代入不等式得到解此不等式，即可求出*a*的取值范围.

[答案]因为*x*=3是关于*x*的不等式

的解，所以解得*a*<4.

故*a*的取值范围是*a*<4.

[点评]本题考查了不等式的解的定义及一元一次不等式的解法，比较简单.根据不等式的解的定义得出是解题的关键.

**专题2：一元一次不等式(组)的解法**

熟练掌握不等式的基本性质是解一元一次不等式(组)的关键，另外在确定不等式(组)的解集时还要善于借助数轴和口诀“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小无处找”准确、快速求解.

**例3：**解不等式组

[解析]分别求出不等式组中每个不等式的解集，然后求出它们的公共部分即可.

[答案]解不等式3*x*+1<2(*x*+2)，得*x*<3.

解不等式得*x*≥-1.

所以原不等式组的解集是-1≤*x*<3.

**专题3：求一元一次不等式(组)的特殊值**

在此类问题中，一般给出一个一元一次不等式(组)，然后在解集的范围内限定取值，解决的方法通常是先求出不等式(组)的解集，再由题意求出符合条件的数值.

**例4：**不等式4-3*x*≥2*x*-6的非负整数解有( ).

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

[解析]本题应先求出不等式的解集，再确定其中的非负整数值.不等式的解集为*x*≤2，所以非负整数解为0，1，2.故选C.

[答案]C

**例5：**解不等式组并写出它所有的整数解.

[解析]先求出两个不等式的解集，再求其公共部分，然后写出整数解即可.

[答案]

解不等式①，得*x*≥1；解不等式②得*x*<4，所以不等式组的解集是1≤*x*<4，所以不等式组的所有整数解是1，2，3.

[点评]本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法是利用口诀，求不等式组解集的口诀：“同大取大，同小取小，大小小大取中间，大大小小无处找.”

**专题4：一元一次不等式组中求参数的技巧**

由已知不等式(组)的解集或整数解来确定待定系数的值或待定系数的取值范围，常用的方法是先用解不等式(组)的方法解出含待定系数的不等式(组)的解集，再代入已给出的条件中，即可求出待定系数的值.

**例6：**如果不等式组的解集是*x*<2，那么*m*的取值范围是( ).

A.*m*=2 B.*m*>2 C.*m*<2 D.*m*≥2

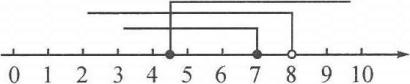
[解析]本题先解出第一个不等式，根据同小取小，不难确定答案.由2*x*-1>3(*x*-1)，得*x*<2，要使不等式组的解集是*x*<2，则*m*的取值范围为*m*≥2.故选D.

[答案]D

**例7：**已知关于*x*的不等式组的整数解共有3个，则*b*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]化简不等式组，得如图所示，将其表示在数轴上，其整数解有3个，即为*x*=5，6，7.由图可知7≤*b*<8.

[答案]7≤*b*<8



**专题5：数形结合思想**

在解有关不等式(组)问题时，有些问题需要我们借助图形来给出解答.解决此类问题时，要充分利用图形反馈的信息，或将文字信息反馈到图形上，做到由数思形，由形想数，顺利解决问题.

**例8：**关于*x*的不等式2*x*-*a*≤-1的解集如图所示，则*a*的取值是( ).

Image4

A.0 B.-3 C.-2 D.-1

[解析]由图可以看出，不等式的解集为*x*≤-1，而由不等式2*x*-*a*≤-1，解得所以解这个方程得*a*=-1.故选D.

[答案]D

**专题6：整体思想**

本章中的整体思想，就是从不等式问题的整体性质出发，突出对问题整体结构的分析和改变，方便代数式的化简与求值.

**例9：**若关于*x*，*y*的二元一次方程组的解满足*x*+*y*<2，求*a*的取值范围.

[解析]由二元一次方程组和不等式的特点，将方程组中的两个方程相加后，即可得到4(*x*+*y*)=4+*a*，因此可将*x*+*y*整体代入，从而可以应用整体思想来求*a*的取值范围.

[答案]将方程组中的两个方程相加，得4(*x*+*y*)=4+*a*，即

又因为*x*+*y*<2，所以解得*a*<4.

[点评]本题在求解时，充分运用了所给定的方程和不等式的特殊性，体现了整体思想.

**专题7：方程思想**

不等式中的方程思想，是对方程概念本质的认识，是分析数学问题中变量间的等量关系，构建方程或方程组，或利用方程的性质去分析、转换、解决问题.

**例10：**已知不等式组的解集是-1<*x*<1，求(*a*+1)(*b*-1)的值.

[解析]要求(*a*+1)(*b*-1)的值，需求出*a*和*b*的值，此时，可先解不等式组，即用字母*a*和*b*表示不等式组中的每一个不等式的解集，进而利用已知解集构造方程求出*a*和*b*，从而求解.

[答案]解不等式组中的第1个不等式，得*x*<

解不等式组中的第2个不等式，得*x*>2*b*+3，

此时，若不等式组有解，解集应为2*b*+3<*x*<.

又因为不等式组的解集是-1<*x*<1，

所以

解得*b*=-2，*a*=1.

所以(*a*+1)(*b*-1)=(1+1)×(-2-1)=-6.

[点评]根据不等式组的解集构造方程，进而求解，是解此类问题的基本思路.

**专题8：不等式(组)的实际应用**

利用不等式组解决实际问题的步骤与列一元一次不等式解应用题的步骤类似，所不同的是，前者寻求的不等关系不止一个，而后者只需找到一个不等关系即可.

在列不等式组时，审题是基础，根据不等关系列出不等式组是关键.解出不等式组的解集后，要养成检验不等式组的解集是否合理，是否符合实际情况的习惯.即审题→设一个未知数→找出题目中所有的数量关系，列出不等式组→解不等式组→检验→作答.

**例11：**筹建中的城南中学需720套单人课桌椅，光明厂承担了这项生产任务，该厂生产桌子的必须5人一组，每组每天可生产12张；生产椅子的必须4人一组，每组每天可生产24把.已知学校筹建组要求光明厂6天完成这项生产任务.

(1)光明厂平均每天要生产多少套单人课桌椅？

(2)现学校筹建组要求至少提前1天完成这项生产任务，光明厂生产课桌椅的员工增加到84名，试给出一种分配生产桌子、椅子的员工数的方案.

[答案](1)∵720÷6=120，

∴光明厂平均每天要生产120套单人课桌椅.

(2)设*x*人生产桌子，则(84-*x*)人生产椅子，则

解得60≤*x*≤60，∴*x*=60，则84-*x*=24，

∴生产桌子的60人，生产椅子的24人.

**专题2：分类讨论思想**

在利用不等式(组)解决实际问题中的方案选择、优化设计以及最大利润等问题时，为了防止漏解和便于比较，我们常常用到分类讨论思想对方案的优劣进行探讨.

**例12：**某工厂计划生产*A*，*B*两种产品共10件，其生产成本和利润如下表：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *A*种产品 | *B*种产品 |
| 成本(万元／件) | 2 | 5 |
| 利润(万元／件) | 1 | 3 |

(1)若工厂计划获利14万元，则*A*，*B*两种产品应分别生产多少件？

(2)若工厂计划投入资金不多于44万元，且获利多于14万元，则工厂有哪几种生产方案？

(3)在(2)的条件下，哪种生产方案获利最大？并求出最大利润.

[答案](1)设生产*A*种产品*x*件，则生产*B*种产品(10-*x*)件，

于是有*x*×1+(10-*x*)×3=14，解得*x*=8，

所以应生产*A*种产品8件，*B*种产品2件.

(2)设生产*A*种产品*y*件，则生产*B*种产品(10-*y*)件，

依题意有解得2≤*y*<8.

所以可以采用的方案有：

共6种方案.

(3)由题意可知，*B*产品生产越多，获利越大，所以当时可获得最大利润，最大利润为26万元.

**同步训练**

1. 已知*a*>*b*>0，则下列结论错误的是( ).

A.*a*+*m*>*b*+*m* B. C.-2*a*>-2*b* D.

[解析]∵*a*>*b*>0，∴*a*+*m*>*b*+*m*，故A选项正确；∴故B选项正确；∴-2*a*<-2*b*，故C选项错误，∴.故D选项正确.故选C.

[答案]C

[点评]本题主要考查了不等式的基本性质，熟记不等式的基本性质是解题的关键.此类题目也可以用举反例的方法排除.

**类型二：**解一元一次不等式(组)

2.不等式组的最大整数解是( ).

A.0 B.-1 C.-2 D.1

答案：C

3.已知关于*x*的不等式(2-*a*)*x*>3的解集为则*a*的取值范围是( ).

A.*a*>0 B.*a*>2 C.*a*<0 D.*a*<2

[解析]分析题中不等式的解集的特点，结合不等式的性质3，可知2-*a*<0，即*a*>2.故选B.

[答案]B

4.若不等式*ax*-2>0的解集为*x*<-2，则关于*y*的方程*ay*+2=0的解为( ).

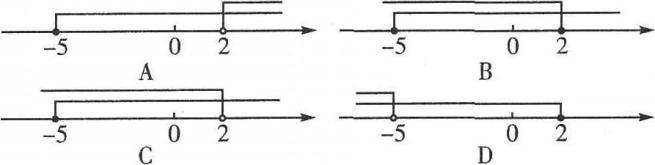
A.*y*=-1 B.*y*=1 C.*y*=-2 D.*y*=2

[解析]解*ax*-2>0，移项得*ax*>2，因为不等式的解集为*x*<-2，所以*a*=-1，则*ay*+2=0，即-*y*+2=0，解得*y*=2.故选D.

[答案]D

[点评]本题考查了不等式的解法以及一元一次方程的解法，正确确定*a*的值是关键.

5.不等式组的解集在数轴上表示为( ).



[解析]本题考查解一元一次不等式组及其解集在数轴上的表示.由不等式*x*+5≥0，解得*x*≥-5；由不等式3-*x*>1，解得*x*<2，则该不等式组的解集为-5≤*x*<2，C项符合.

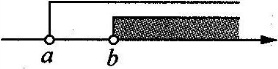
[答案]C

6.关于*x*的方程5*x*-2*m*=-4-*x*的解在2与10之间，则*m*的取值范围是( ).

A.*m*>8 B.*m*<32 C.8<*m*<32 D.*m*<8或*m*>32

答案：C

7.在数轴上表示不等式组的解集如图所示，则不等式组的解集是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



答案：*x*<*a*

8. 不等式组的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]

由①得*x*≤1，由②得*x*≥-4，

故此不等式组的解集为-4≤*x*≤1.

[答案]-4≤*x*≤1

9.不等式-1≤3-2*x*<6的所有整数解的和是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，所有整数解的积是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：2，0

10.解不等式：.

答案：

11.解一元一次不等式组并把解在数轴上表示出来.

Image5

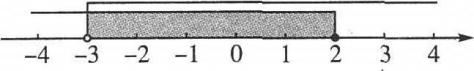
[解析]本题考查解不等式组及其解集表示.先分别求出不等式1+*x*>-2与的解集，再确定其公共部分，即可得到不等式组的解集，然后将其表示在数轴上即可.

[答案]解不等式1+*x*>-2，得*x*>-3；

解不等式得*x*≤2；

所以不等式组的解集为-3<*x*≤2.

解集在数轴上表示如图所示：



12.解不等式组并写出它的所有非负整数解.

[解析]分别求出不等式组中每个不等式的解，确定出不等式组的解集，再从解集中找出不等式组的非负整数解即可.

[答案]

由不等式①得*x*≥-2，

由不等式②得

因此，不等式组的解集为

∴非负整数解有0，1，2，3.

13.某工厂现有甲种原料360千克，乙种原料290千克，计划利用这两种原料生产*A*，*B*两种产品共50件.已知生产1件*A*种产品需甲种原料9千克、乙种原料3千克，生产1件*B*种产品需甲种原料4千克、乙种原料10千克，请提出安排生产的方案.

答案：设安排生产*A*种产品*x*件，则安排生产*B*种产品(50-*x*)件.依题意得

解得30≤*x*≤32

因为*x*为正整数，所以*x*=30，31，32，

所以有三种方案：(1)安排生产*A*种产品30件，*B*种产品20件；

(2)安排生产*A*种产品31件，*B*种产品19件；

(3)安排生产*A*种产品32件，*B*种产品18件.